آنالیز برداری

انواع کمیت‌ها

اسکالر

حجم، بار، اختلاف‌پتانسیل، زمان و ...

اسکالر Scalar: به کمیت‌هائي اتلاق مي‌شوند که تنها توسط يك عدد که همان اندازه آن کميت باشد مشخص مي‌شوند مانند جرم، انرژي و بار الكتريكي

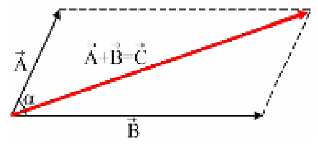
برداری

مساحت، میدان، گشتاور، نیرو و...

بردار vector: كميت‌هايي هستند كه براي مشخص شدن آنان علاوه بر اندازه، به جهت نيز نيازمند هستند مانند نيرو، شدت ميدان الكتريكي و چگالي جريان حجمي الكتريكي منظور از جهت در اين كلام، معلوم بودن راستا يا محمل بردار، جهت و سمت بردار بر روي اين راستا مي‌باشد.

آنالیز برداری مقدماتی

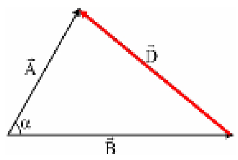
جمع برداری



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$|\vec{C}| = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 + 2|A||B|\cos\alpha}$$

تفریق برداری



$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$$

$$|\vec{D}| = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 - 2|A||B|\cos\alpha}$$

ضرب‌های برداری

ضرب عدد در بردار

$$\vec{F} = q\,\vec{E}$$

if $q > 0 \rightarrow$ بردار $\vec{F}$ هم‌جهت با $\vec{E}$ خواهد شد.

if $q < 0 \rightarrow$ جهت بردار $\vec{F}$ عکس $\vec{E}$ خواهد شد.

ضرب داخلی دو بردار

ضرب خارجی دو بردار

ضرب داخلی دو بردار

ضرب داخلی دو بردار در حقیقت تصویرسازی یک بردار بر روی بردار دیگر است و حاصل آن برابر یک عدد اسکالر خواهد بود. نتیجه حاصلضرب داخلی دو بردار از رابطه زیر قابل محاسبه است

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$$

$$0 < \alpha < \pi$$

برخی از خواص حاصلضرب داخلی

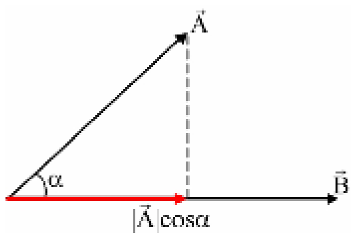
✓ زاویه بین دو بردار

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

✓

$$\left.\begin{array}{l} \vec{A} = \text{صفر} \\ \text{یا} \\ \vec{B} = \text{صفر} \\ \text{یا} \\ \vec{A}\perp\vec{B} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0$$

✓ تصویر یک بردار روی برداری دیگر



✓ ضرب داخلی خاصیت جابه‌جایی دارد

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

✓ حاصل‌ضرب دو بردار در دستگاه دکارتی

$$\begin{array}{l} \vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} \\ \vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z} \end{array} \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

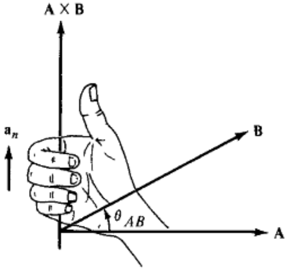
آنالیز برداری

ضرب خارجی دو بردار

اندازه این بردار از رابطه مقابل به دست می‌آید: $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\alpha$

جهت این بردار از قانون دست راست به دست می‌آید.

قانون دست راست: اگر چهار انگشت در جهت بردار اول «در اینجا $\vec{A}$» و کف دست به سمت بردار دوم «در اینجا $\vec{B}$» باشد، به طوری که بسته شدن انگشتان، زاویه θ را جاروب کند، انگشت شست جهت $\hat{n}$ را مشخص می‌کند.



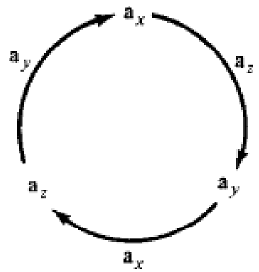
برخی از خواص حاصلضرب خارجی

✓ اگر دو بردار با هم موازی باشند

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin(0°) = \text{صفر}$$

✓ ضرب خارجی خاصیت جابه‌جایی ندارد

$$\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$$



✓ ضرب خارجی دو بردار در دستگاه دکارتی

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{x} + B_y\hat{y} + B_z\hat{z}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

✓ زاویه بین دو بردار

$$\alpha = \sin^{-1}\frac{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \neq (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0$$

$$\mathbf{a}_x\times\mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{a}_y\times\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{a}_z\times\mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y$$

مثال :

به دو روش مختلف، زاویه مابین دو بردار ارائه شده در زیر را بدست آورید

$$\mathbf{A} = 3\mathbf{a}_x + 4\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{a}_y - 5\mathbf{a}_z$$

پاسخ :

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (3, 4, 1)\cdot(0, 2, -5) = 0 + 8 - 5 = 3$$

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

$$\cos\theta_{AB} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} = \frac{3}{\sqrt{(26)(29)}} = 0.1092$$

$$\theta_{AB} = \cos^{-1} 0.1092 = 83.73°$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-20 - 2)\mathbf{a}_x + (0 + 15)\mathbf{a}_y + (6 - 0)\mathbf{a}_z = (-22, 15, 6)$$

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = \sqrt{(-22)^2 + 15^2 + 6^2} = \sqrt{745}$$

$$\sin\theta_{AB} = \frac{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|} = \frac{\sqrt{745}}{\sqrt{(26)(29)}} = 0.994$$

$$\theta_{AB} = \cos^{-1} 0.994 = 83.73°$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\alpha$$

تمرین:

۱- در درون یک مثلث، رابطه معروف به رابطه کسینوس را اثبات نمائید.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

۲- در درون یک مثلث، رابطه معروف به رابطه سینوسها را اثبات کنید.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

۳- روابط ارائه شده در زیر را اثبات کنید.

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

۴- به دو سئوال تستی زیر پاسخ دهید.

? بردار $A = (y-1)a_x + 2xa_y$ مفروض است. تصویر این بردار را بر روی بردار $B = 5a_x - a_y + 2a_z$ در نقطه $(2,2,2)$ بدست آورید. (مهندسی برق - آزاد ۸۰)

۱) $\frac{1}{\sqrt{30}}$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{30}}$ ۳) $\frac{3}{\sqrt{30}}$ ۴) $\frac{4}{\sqrt{30}}$

? اگر $A = a_x + a_y - a_z$ و $B = -2a_x + a_y + a_z$ بوده و رابطه بین A, B, C به صورت زیر باشد، C را محاسبه کنید. (مهندسی برق - آزاد ۸۱)

$$A \times (B \times C) + (A \times B) \times C = -a_x - 9a_y - 5a_z$$

۱) $3a_x + a_y + 2a_z$ ۲) $-3a_x - a_y - 2a_z$ ۳) $-3a_x + a_y - 2a_z$ ۴) $3a_x - a_y + 2a_z$